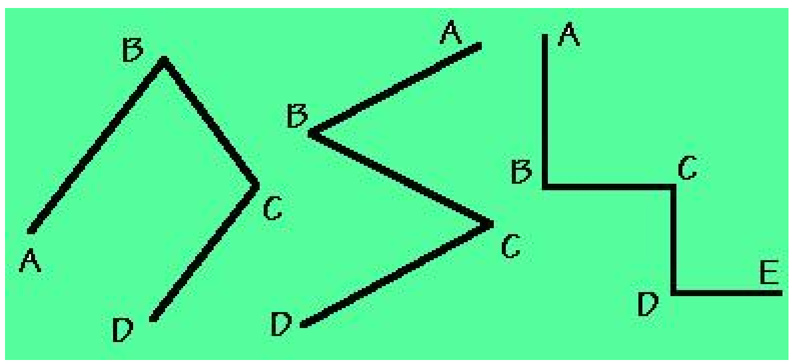
Segmentos Lineares e poligonais abertas

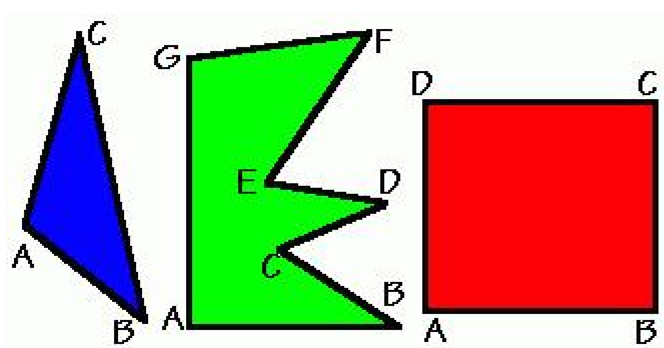
Na que segue, apresentamos um segmento, dois segmentos consecutivos e três segmentos consecutivos. Segmentos consecutivos são aqueles em que a extremidade final do primeiro segmento é a extremidade inicial do segundo e a extremidade final do segundo é a extremidadade inicial do terceiro e assim por diante.

Uma linha poligonal aberta é formada por segmentos de reta consecutivos e não colineares, ou seja, segmentos de reta que não estão alinhados na mesma reta e que não se fecham.



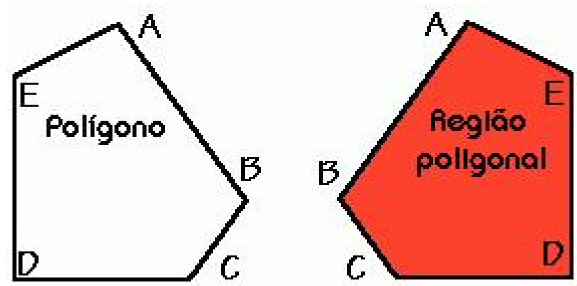
Polígono (Poligonal fechada) e Região poligonal

Polígono é uma figura geométrica cuja palavra é proveniente do grego que quer dizer: poli(muitos) + gonos(ângulos). Um polígono é uma linha poligonal fechada formada por segmentos consecutivos, não colineares que se fecham.



A região interna a um polígono é a região plana delimitada por um polígono.

Muitas vezes encontramos na literatura sobre Geometria a palavra polígono identificada com a região localizada dentro da linha poligonal fechada ms é bom deixar claro que polígono representa apenas a linha. Quando não há perigo na informação sobre o que se pretende obter, pode-se usar a palavra num ou no outro sentido.

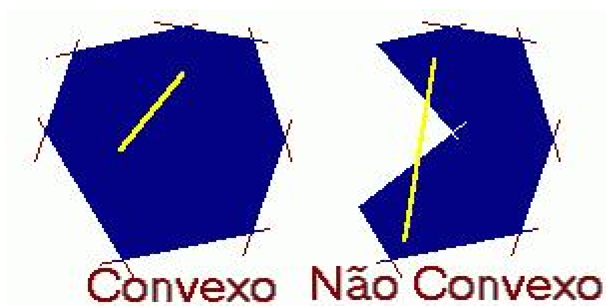


Considerando a figura anexada, observamos que:

1. Os segmentos AB, BC, CD, DE e EA são os lados do polígono e da região poligonal.
2. Os pontos A, B, C, D, E são os vértices da região poligonal e do polígono.
3. Os ângulos da linha poligonal, da região poligonal fechada e do polígono são: A, B, C, D e E.

Regiões poligonais quanto à convexidade

Região poligonal convexa: É uma região poligonal que não apresenta reentrâncias no corpo da mesma. Isto significa que todo segmento de reta cujas extremidades estão nesta região estará totalmente contido na região poligonal.



Região poligonal não convexa: É uma região poligonal que apresenta reentrâncias no corpo da mesma, o que ela possui segmentos de reta cujas extremidades estão na região poligonal mas que não estão totalmente contidos na região poligonal.

Nomes dos polígonos

Dependendo do número de lados, um polígono recebe os seguintes nomes de acordo com a tabela:

No. de lados	Polígono	No. de lados	Polígono

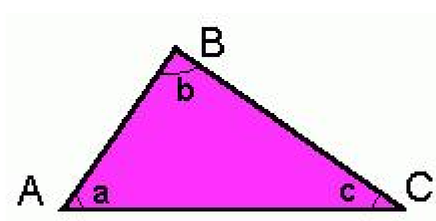
1	não existe	11	undecágono
2	não existe	12	dodecágono
3	triângulo	13	tridecágono
4	quadrilátero	14	tetradecágono
5	pentágono	15	pentadecágono
6	hexágono	16	hexadecágono
7	heptágono	17	heptadecágono
8	octógono	18	octadecágono
9	eneágono	19	eneadecágono
10	decágono	20	icoságono

Polígono Regular: É o polígono que possui todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes. No desenho animado ao lado podemos observar os polígonos: triângulo, quadrado, pentágono, hexágono e heptágono.

Triângulos e a sua classificação

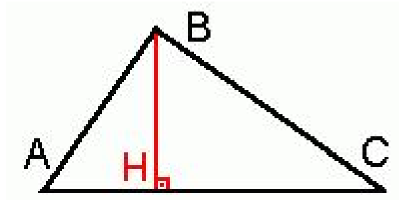
Triângulo é um polígono de três lados. É o polígono que possui o menor número de lados. Talvez seja o polígono mais importante que existe. Todo triângulo possui alguns elementos e os principais são: vértices, lados, ângulos, alturas, medianas e bissetrizes.

Apresentaremos agora alguns objetos com detalhes sobre os mesmos.

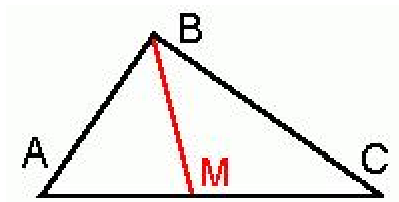


1. Vértices: A,B,C.
2. Lados: AB,BC e AC.
3. Ângulos internos: a, b e c.

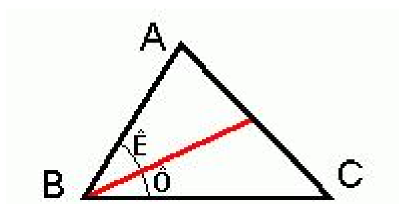
Altura: É um segmento de reta traçado a partir de um vértice de forma a encontrar o lado oposto ao vértice formando um ângulo reto. BH é uma altura do triângulo.



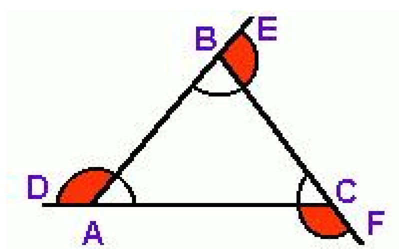
Mediana: É o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. BM é uma mediana.



Bissetriz: É a semi-reta que divide um ângulo em duas partes iguais. O ângulo B está dividido ao meio e neste caso Ê = Ô.

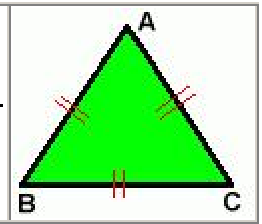
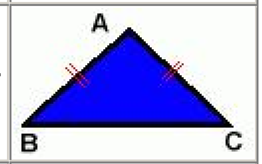
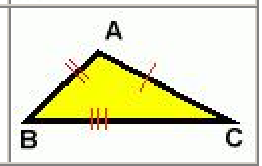


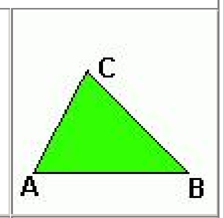
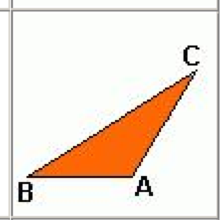
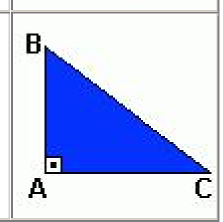
Ângulo Interno: É formado por dois lados do triângulo. Todo triângulo possui três ângulos internos.



Ângulo Externo: É formado por um dos lados do triângulo e pelo prolongamento do lado adjacente(ao lado).

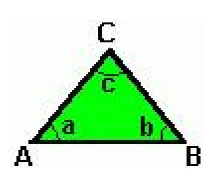
Classificação dos triângulos quanto ao número de lados

Triângulo Equilátero	Os três lados têm medidas iguais. m(AB)=m(BC)=m(CA)	
Triângulo Isósceles	Dois lados têm a mesma medida. m(AB)=m(AC)	
Triângulo Escaleno	Todos os três lados têm medidas diferentes.	

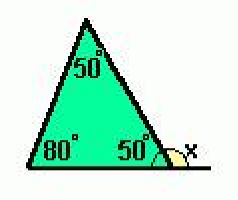
Classificação dos triângulos quanto às medidas dos ângulos		
Triângulo Acutângulo	Todos os ângulos internos são agudos, isto é, as medidas dos ângulos são menores do que 90º.	
Triângulo Obtusângulo	Um ângulo interno é obtuso, isto é, possui um ângulo com medida maior do que 90º.	
Triângulo Retângulo	Possui um ângulo interno reto (90 graus).	

Medidas dos ângulos de um triângulo

Ângulos Internos: Consideremos o triângulo ABC. Poderemos identificar com as letras a, b e c as medidas dos ângulos internos desse triângulo. Em alguns locais escrevemos as letras maiúsculas A, B e C para representar os ângulos.

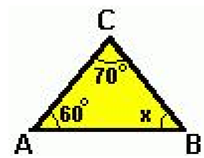


A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180 graus, isto é:

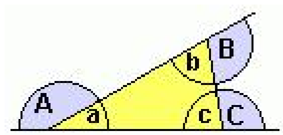


$$a + b + c = 180º$$

Exemplo: Considerando o triângulo abaixo, podemos escrever que: 70º+60º+x=180º e dessa forma, obtemos x=180º-70º-60º=50º.



Ângulos Externos: Consideremos o triângulo ABC. Como observamos no desenho, em anexo, as letras minúsculas representam os ângulos internos e as respectivas letras maiúsculas os ângulos externos.



Todo ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a esse ângulo externo. Assim:

$$A = b+c, \quad B = a+c, \quad C = a+b$$

Exemplo: No triângulo desenhado ao lado: x=50º+80º=130º.

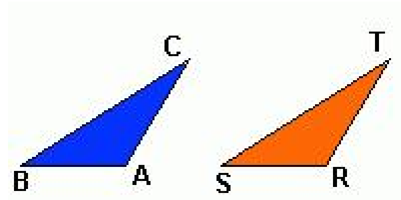
Congruência de Triângulos

A idéia de congruência: Duas figuras planas são congruentes quando têm a mesma forma e as mesmas dimensões, isto é, o mesmo tamanho.

Para escrever que dois triângulos ABC e DEF são congruentes, usaremos a notação:

$$ABC \sim DEF$$

Para os triângulos das figuras abaixo:



existe a congruência entre os lados, tal que:

AB ~ RS, BC ~ ST, CA ~ TR

e entre os ângulos:

A ~ R , B ~ S , C ~ T

Se o triângulo ABC é congruente ao triângulo RST, escrevemos:

ABC ~ RST

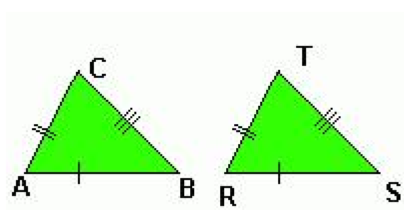
Dois triângulos são congruentes, se os seus elementos correspondentes são ordenadamente congruentes, isto é, os três lados e os três ângulos de cada triângulo têm respectivamente as mesmas medidas.

Para verificar se um triângulo é congruente a outro, não é necessário saber a medida de todos os seis elementos, basta conhecer três elementos, entre os quais esteja presente pelo menos um lado. Para facilitar o estudo, indicaremos os lados correspondentes congruentes marcados com símbolos gráficos iguais.

Casos de Congruência de Triângulos

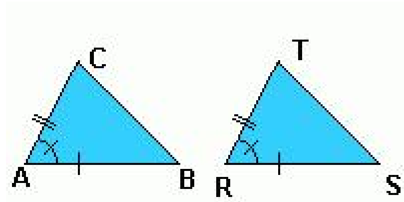
1. LLL (Lado, Lado, Lado): Os três lados são conhecidos.

   Dois triângulos são congruentes quando têm, respectivamente, os três lados congruentes. Observe que os elementos congruentes têm a mesma marca.



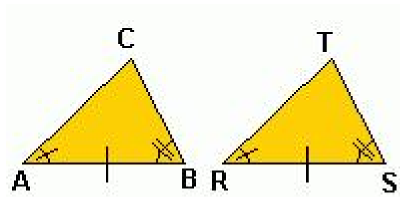
2. LAL (Lado, Ângulo, Lado): Dados dois lados e um ângulo

   Dois triângulos são congruentes quando têm dois lados congruentes e os ângulos formados por eles também são congruentes.



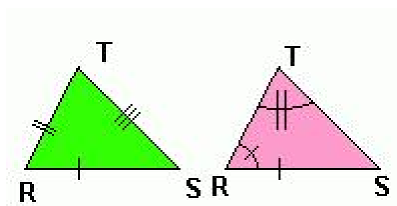
3. ALA (Ângulo, Lado, Ângulo): Dados dois ângulos e um lado

   Dois triângulos são congruentes quando têm um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado, respectivamente, congruentes.



4. LAAo (Lado, Ângulo, Ângulo oposto): Conhecido um lado, um ângulo e um ângulo oposto ao lado.

   Dois triângulos são congruentes quando têm um lado, um ângulo, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes.



Razão entre segmentos de Reta

Segmento de reta é o conjunto de todos os pontos de uma reta que estão limitados por dois pontos que são as extremidades do segmento, sendo um deles o ponto inicial e o outro o ponto final. Denotamos um segmento por duas letras como por exemplo, AB, sendo A o início e B o final do segmento.

Exemplo: AB é um segmento de reta que denotamos por AB.

A _____________ B

Não é possível dividir um segmento de reta por outro, mas é possível realizar a divisão entre as medidas dos dois segmentos.

Consideremos os segmentos AB e CD, indicados:

A ________ B   m(AB) =2cm
C _______________ D   m(CD)=5 cm

A razão entre os segmentos AB e CD, denotado aqui por, AB/CD, é definida como a razão entre as medidas desse segmentos , isto é:

AB/CD=2/5

Segmentos Proporcionais

Proporção é a igualdade entre duas razões equivalentes. De forma semelhante aos que já estudamos com números racionais, é possível eatabelecer a proporcionalidade entre segmentos de reta, através das medidas desse segmentos.

Vamos considerar primeiramente um caso particular com quatro segmentos de reta:

m(AB) =2cm	A______B	P__________Q	m(PQ) =4cm
m(CD) =3cm	C___________D	R____________________S	m(RS) =6cm

A razão entre os segmentos AB e CD e a razão entre os segmentos PQ e RS, são dadas por frações equivalentes, isto é:

AB/CD = 2/3;   PQ/RS = 4/6

e como 2/3 = 4/6, segue a existência de uma proporção entre esses quatro segmentos de reta. Isto nos conduz à definição de segmentos proporcionais.

Diremos que quatro segmentos de reta, AB, BC, CD e DE, nesta ordem, são proporcionais se:

AB/BC = CD/DE

Os segmentos AB e DE são os segmentos extremos e os segmentos BC e CD são os segmentos meios.

A proporcionalidade acima é garantida pelo fato que existe uma proporção entre os números reais que representam as medidas dos segmentos:

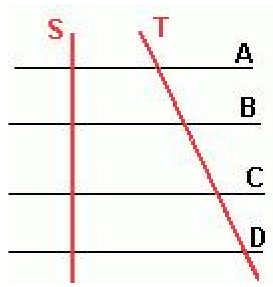
$$\frac{m(AB)}{m(BC)} = \frac{m(CD)}{m(DE)}$$

Propriedade Fundamental das proporções: Numa proporção de segmentos, o produto das medidas dos segmentos meios é igual ao produto das medidas dos segmentos extremos.

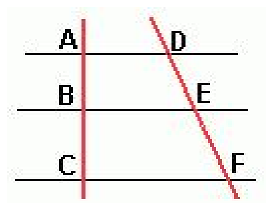
$$m(AB) \cdot m(DE) = m(BC) \cdot m(CD)$$

Feixe de retas paralelas

Um conjunto de três ou mais retas paralelas num plano é chamado feixe de retas paralelas. A reta que intercepta as retas do feixe é chamada de reta transversal. As retas A, B, C e D que aparecem no desenho anexado, formam um feixe de retas paralelas enquanto que as retas S e T são retas transversais.



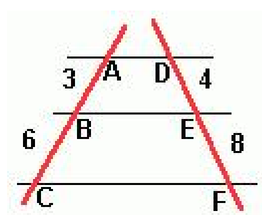
Teorema de Tales: Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais. A figura ao lado representa uma situação onde aparece um feixe de três retas paralelas cortado por duas retas transversais.



Identificamos na sequência algumas proporções:

$$AB/BC = DE/EF$$
$$BC/AB = EF/DE$$
$$AB/DE = BC/EF$$
$$DE/AB = EF/BC$$

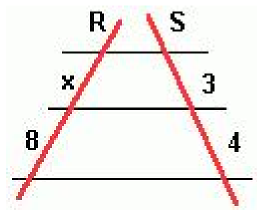
Exemplo: Consideremos a figura ao lado com um feixe de retas paralelas, sendo as medidas dos segmentos indicadas em centímetros.



Assim:

BC/AB = EF/DE
AB/DE = BC/EF
DE/AB = EF/BC

Observamos que uma proporção pode ser formulada de várias maneiras. Se um dos segmentos do feixe de paralelas for desconhecido, a sua dimensão pode ser determinada com o uso de razões proporcionais.

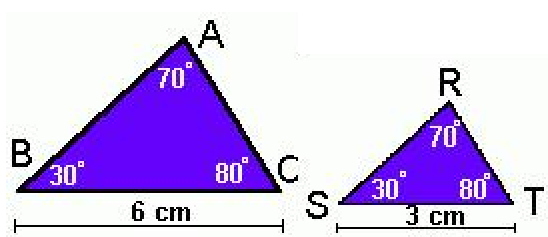


Semelhança de Triângulos

A idéia de semelhança: Duas figuras são semelhantes quando têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho.

Se duas figuras R e S são semelhantes, denotamos: R~S.

Exemplo: As ampliações e as reduções fotográficas são figuras semelhantes. Para os triângulos:



os três ângulos são respectivamente congruentes, isto é:

A~R, B~S, C~T

Observação: Dados dois triângulos semelhantes, tais triângulos possuem lados proporcionais e ângulos congruentes. Se um lado do primeiro triângulo é proporcional a um lado do outro triângulo, então estes dois lados são ditos homólogos. Nos triângulos acima, todos os lados proporcionais são homólogos.

Realmente:

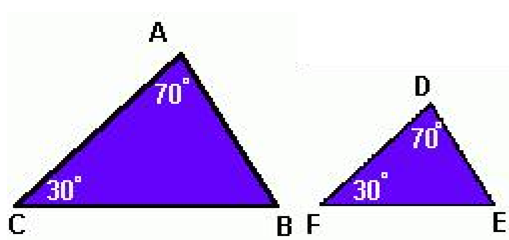
AB~RS	pois	m(AB)/m(RS)=2
BC~ST	pois	m(BC)/m(ST)=2
AC~RT	pois	m(AC)/m(RT)=2

Como as razões acima são todas iguais a 2, este valor comum é chamado razão de semelhança entre os triângulos. Podemos concluir que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo RST.

Dois triângulos são semelhantes se, têm os 3 ângulos e os 3 lados correspondentes proporcionais, mas existem alguns casos interessantes a analisar.

Casos de Semelhança de Triângulos

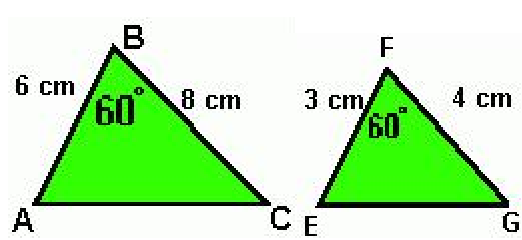
Dois ângulos congruentes: Se dois triângulos tem dois ângulos correspondentes congruentes, então os triângulos são semelhantes.



Se A~D e C~F então:

ABC~DEF

Dois lados congruentes:Se dois triângulos tem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados também são congruentes, então os triângulos são semelhantes.



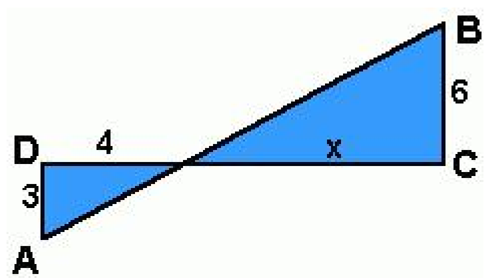
Como

$$m(AB) / m(EF) = m(BC) / m(FG) = 2$$

então

$$ABC \sim EFG$$

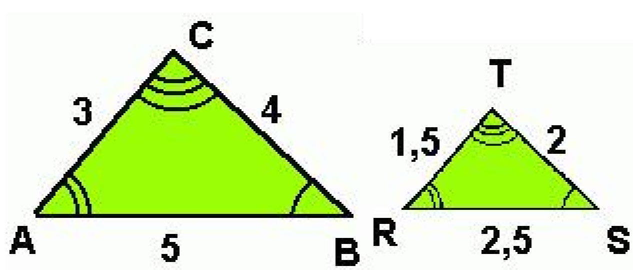
Exemplo: Na figura abaixo, observamos que um triângulo pode ser "rodado" sobre o outro para gerar dois triângulos semelhantes e o valor de x será igual a 8.



Realmente, x pode ser determinado a partir da semelhança de triângulos. Identificaremos os lados homólogos e com eles construiremos a proporção:

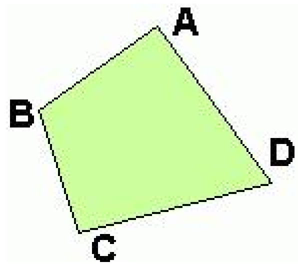
$$\frac{3}{6} = \frac{4}{x}$$

Três lados proporcionais: Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes.



Quadriláteros e a sua classificação

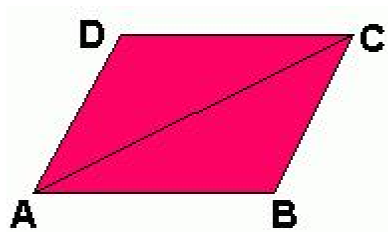
Quadrilátero é um polígono com quatro lados e os principais quadriláteros são: quadrado, retângulo, losango, trapézio e trapezóide.



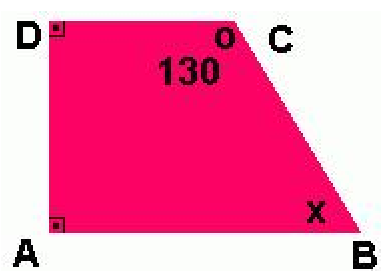
No quadrilátero acima, observamos alguns elementos geométricos:

1. Os vértices são os pontos: A, B, C e D.
2. Os ângulos internos são A, B, C e D.
3. Os lados são os segmentos AB, BC, CD e DA.

Observação: Ao unir os vértices opostos de um quadrilátero qualquer, obtemos sempre dois triângulos e como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus, concluímos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360 graus.



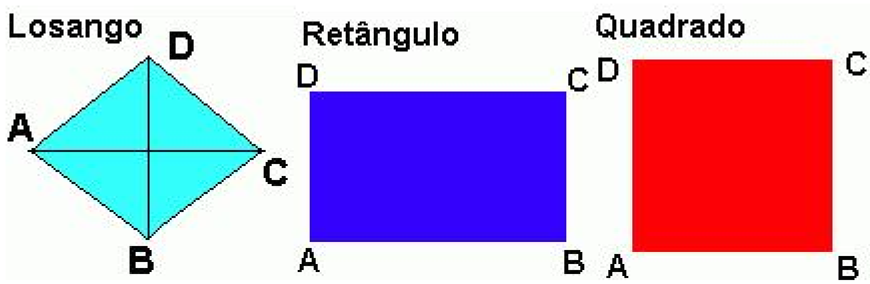
Exercício: Determinar a medida do ângulo x na gravura abaixo.



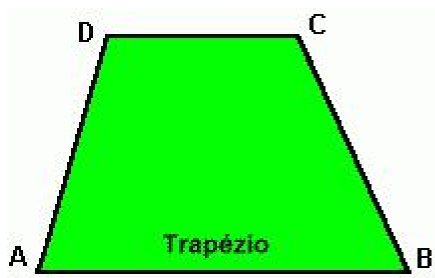
Classificação dos Quadriláteros

Paralelogramo: É o quadrilátero que tem lados opostos paralelos. Num paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes. Os paralelogramos mais importantes recebem nomes especiais:

1. Losango: 4 lados congruentes
2. Retângulo: 4 ângulos retos (90 graus)
3. Quadrado: 4 lados congruentes e 4 ângulos retos.



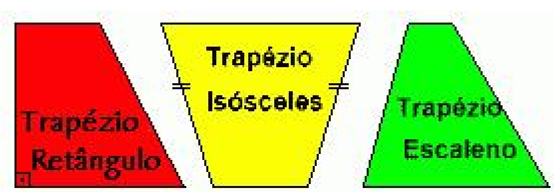
Trapézio: É o quadrilátero que tem apenas dois lados opostos paralelos. Alguns elementos gráficos de um trapézio (parecido com aquele de um circo).



1. AB é paralelo a CD
2. BC é não é paralelo a AD
3. AB é a base maior
4. DC é a base menor

Os trapézios recebem nomes de acordo com os triângulos que têm características semelhantes. Um trapézio pode ser:

1. Retângulo: dois ângulos retos
2. Isósceles: lados não paralelos congruentes
3. Escaleno: lados não paralelos diferentes



Exercício: Prolongar as retas apoiadas nos lados opostos não paralelos dos trapézios da figura acima para obter, respectivamente, um triângulo retângulo, um isósceles e um escaleno. Observar mais acima nesta mesma página os nomes dos triângulos obtidos e os nomes destes trapézios!